CNAM – *Paris* Avril 2008

MVA101
Analyse et Calcul Matriciel
Deuxième session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (7 points)

Soit f la fonction ***paire*** de période 1 définie par : $f(x) = 8x^3$ sur $[0, \frac{1}{2}]$

1. Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2\,,\,+2]$.
2. Pourquoi f est-elle développable en série de Fourier ?
3. Calculer les coefficients de Fourier de f. On pourra utiliser la formule suivante, valable quel que soit $a \neq 0$:
$$\int_0^1 f(t)\cos(at)dt = 12\left(\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)a^2 - 8\cos\left(\frac{a}{2}\right) + 4\cos(a) + 4}{a^4}\right)$$
4. Comparer $f(t)$ à $s(t)$ et $w(t)$ avec :
$$s(t) = \frac{1}{4}+\frac{6}{\pi^2}\left(\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{(2p)^2}\cos(2\pi\, 2p\, t)\right)+\frac{6}{\pi^4}\left(\sum_{p\geqslant 1}\frac{4-(2p-1)^2\pi^2}{(2p-1)^4}\cos[\,2\pi\,(2p-1)\,t\,]\right)$$
$$w(t) = \frac{1}{4}+\frac{6}{\pi^2}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(2\pi\, n\, t)\right)+\frac{24}{\pi^4}\left(\sum_{p\geqslant 1}\frac{\cos[\,2\pi\,(2p-1)\,t\,]}{(2p-1)^4}\right)$$
5. Sachant que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{(2p-1)^4}$.
6. Utiliser les résultats de la question précédente pour calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

T.S.V.P.

Exercice 2 (8 points)

On considère le système différentiel suivant, que l'on veut résoudre en utilisant la transformée de Laplace :

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 5\,y(t) \\ y'(t) = x(t) - 3\,y(t) \end{cases} \qquad \text{avec} \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

1. On admettra que $X(p) = \mathcal{L}\big(x(t)\big)(p)$ et $Y(p) = \mathcal{L}\big(y(t)\big)(p)$ existent.
   En prenant la transformée de Laplace de chaque équation de (E), écrire le système liant $X(p)$ et $Y(p)$.
2. Résoudre le système obtenu à la question précédente.
3. En déduire $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice 3 (9 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les vecteurs propres de A.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et déterminer $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ solution de

   $U_n = A\,U_{n-1}$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆