CNAM – Paris janvier 2008

MVA101

Analyse et Calcul Matriciel

Première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (6 points)

La fonction $y(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$(E) \quad x^2\, y''(x) - 2x\, y'(x) + (2 - x^2)\, y(x) = 0$$

On suppose qu'elle est développable en série entière au voisinage de 0 :

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre les coefficients a_n.
2. Que vaut a_0 ? Calculer a_{2p+1} en fonction de $\alpha = a_1$ et a_{2p} en fonction de $\beta = a_2$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière.
4. Exprimer la somme de la série entière au moyen de fonctions élémentaires.

Exercice 2 (7 points)

Soient $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, trois fonctions inconnues de t qui vérifient le système différentiel suivant:

$$(D) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 3x(t) - 2z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \end{cases}$$

et les conditions initiales $x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1$.

1. En écrivant la transformée de Laplace de chacune des équations de ce système différentiel, et en notant $X(p)$, $Y(p)$ et $Z(p)$ les transformées de Laplace de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ respectivement, déterminer le système linéaire d'équations en $X(p)$, $Y(p)$ et $Z(p)$.

2. Résoudre le système ainsi obtenu.

3. En utilisant la transformée de Laplace inverse (ou les tables du calcul symbolique), déterminer $x(t),\ y(t)$ et $z(t)$.

Exercice 3 (6 points)

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant une méthode laissée aux choix, déterminer la matrice inconnue B solution de l'équation matricielle $AB = C$.

2. Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres de B.

3. Calculer B^n pour tout entier relatif n.

Exercice 4 (6 points)

La fonction f est définie sur $[-1, +1]$ par $f(x) = x - x^3$; elle est périodique ; sa plus petite période strictement positive est 2.

1. Représenter graphiquement f sur $[-3, +3]$. Quelle est la parité de f ?

2. Pourquoi f est-elle développable en série de Fourier ? Quelle est la somme de sa série de Fourier ?

3. Calculer les coefficients de Fourier et écrire la série de Fourier de f.

   On pourra admettre et utiliser la formule suivante (pour $\lambda \neq 0$) :

$$\int_{-1}^{+1} (t - t^3) \sin \lambda t \, dt = -\frac{12 \cos \lambda}{\lambda^3} - \frac{4 \sin \lambda}{\lambda^2} + \frac{12 \sin \lambda}{\lambda^4}$$

4. Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. En déduire $S = \displaystyle\sum_{p \geqslant 1} \frac{(-1)^p}{(2p-1)^3}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆