CNAM – *Paris* Avril 2008

MVA005
Calcul différentiel et intégral
Deuxième session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (5 points)

On pose $g(x) = \operatorname{ch} x - \cos x$ et $h(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de $v(x) = 3h(x) - g(x)$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0, de $u(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$.

Exercice 2 (7 points)

On considère l'équation différentielle du deuxième ordre, linéaire, à coefficients constants :

$$y''(x) - 4\,y(x) = -16x\ \sin 2x \qquad (E)$$

1. Résoudre (H), l'équation sans second membre associée à (E).
2. Déterminer une solution de (E) qui soit de la forme $y(x) = \cos 2x + a\,x \sin 2x$, avec a une constante que l'on précisera.
3. En déduire la solution générale de l'équation (H).
4. Déterminer la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$

Exercice 3 (7 points)

On pose $F(x) = \dfrac{x^3 + 3x + 7}{x^3 - 3x - 2}$.

1. Déterminer chaque pôle de $F(x)$, avec sa multiplicité.
   (aide : ce sont des nombres entiers de valeur absolue inférieure ou égale à 2)
2. Quel est le degré de $E(x)$, la partie entière de $F(x)$?
   Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. En déduire $E(x)$.
3. Décomposer $F(x)$ en éléments simples.
4. Calculer une primitive de $F(x)$, puis $I = \displaystyle\int_0^1 F(x)dx$.
   Exprimer I à l'aide de $\ln 2$.

Exercice 4 (8 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x^3 - 3x| - 1$.

1. Quel est son domaine de définition ? Sa parité ? Est-elle continue ? Pourquoi ?
2. Déterminer trois nombres a, b, c et quatre intervalles :

$$I_1 =]-\infty\,;\,a\,] \qquad I_2 = [\,a\,;\,b\,] \qquad I_3 = [\,b\,;\,c\,] \qquad I_4 = [\,c\,;+\infty[$$

   ayant la propriété que sur chacun d'eux $f(x)$ s'écrit sans valeur absolue, simplement comme un polynôme en x.
3. Étudier les variations de $f(x)$.
4. Dessiner la courbe représentative de f.
5. Déterminer m, le minimum de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = m$.
6. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel C le nombre de solutions de l'équation $f(x) = C$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆