MVA005

Calcul différentiel et intégral

Première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (8 points)

Soit $f(x) = \left|x(x+3)\right| - \left|x(x-3)\right| - 5x$.

1. Donner pour chacun des intervalles $]-\infty, -3\,[\,,\ ]-3, 0\,[,\ ]\,0, 3\,[,\ ]\,3, +\infty[$ une expression de $f(x)$ sans valeur absolue.

   Sans plus de calcul, dire quelle droite est asymptote à la courbe représentative.

2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable en tout point ?

   Montrer qu'elle est impaire.

3. Faire le tableau de variation de $f(x)$ et dessiner la courbe représentative de la fonction.

4. Déterminer le maximum et le minimum de $f(x)$ sur $[\,-2, +3\,]$

   (on exprimera les résultats sous forme de fraction simplifiée)

5. Calculer $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_3^4 f(x)dx$.

   En déduire la valeur moyenne de $f(x)$ sur le segment $[\,0, 4\,]$.

Exercice 2 (6 points)

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (t-2)\,x'(t) - 2\,x(t) = -\,4 - 5\,t$$

1. Résoudre (H), l'équation sans second membre.

2. Appliquer la méthode de variation de la constante pour résoudre (E).

3. On note x_m la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $x(0) = m$. Donner une formule pour $x_m(t)$.

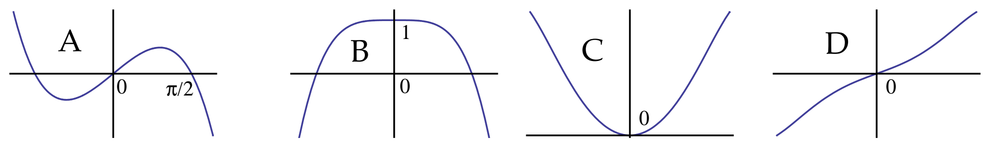
4. Est-ce qu'il existe une solution de (E) qui vérifie la condition initiale $x(2) = 0$?

Exercice 3 (9 points)

Nota : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

On considère quatre fonctions : $\begin{cases} f_1(x) = \cos x \ \mathrm{ch}\, x & f_2(x) = \cos x \ \mathrm{sh}\, x \\ f_3(x) = \sin x \ \mathrm{ch}\, x & f_4(x) = \sin x \ \mathrm{sh}\, x \end{cases}$

dont voici, en désordre, les courbes représentatives :



1. Compléter le tableau suivant et retrouver le nom de la courbe représentative de chaque fonction.

$f(x)$	$f(0)$	parité	courbe
$f_1(x)$			
$f_2(x)$			
$f_3(x)$			
$f_4(x)$			

2. Calculer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0, de $f_2(x)$.

3. (a) En utilisant les formules d'Euler, écrire $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ comme somme d'exponentielles complexes.

   (b) Si α est un nombre complexe non nul, on rappelle que $\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ est une primitive de $e^{\alpha x}$.
   Utiliser ce résultat pour écrire une primitive de $f_1(x)$ comme somme de nombres complexes.

   (c) Éliminer les nombres complexes figurant dans les dénominateurs des coefficients des exponentielles en utilisant leurs conjugués.

   (d) En déduire deux nombres a et b pour que $af_2(x) + bf_3(x)$ soit une primitive de $f_1(x)$.
   Retrouver le résultat en dérivant $af_2(x) + bf_3(x)$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆