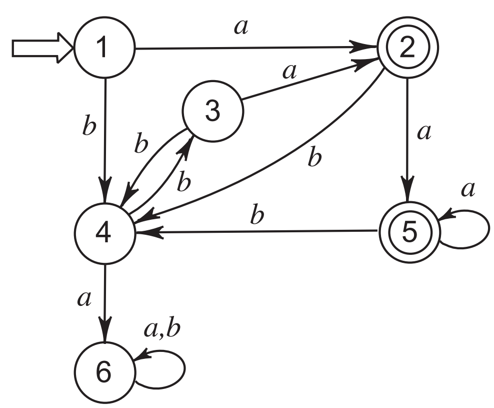
MVA004
Automates, codes, graphes et matrices
Deuxième session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (8 points)

L'alphabet étant $\Sigma = \{a, b\}$, on note L le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ défini par le diagramme :



1°) Donner la liste des mots de L de longueur inférieure ou égale à 4.

2°) Écrire les équations du départ pour $\mathcal{A}$.

3°) Si on note les langages du départ D_1 à D_6, que vaut D_6 ?
Comparer D_1 et D_3, puis D_2 et D_5.

4°) Résoudre le système précédent, et en déduire une expression régulière pour le langage L.

5°) Donner le mot le plus court de chacun des langages D_1 à D_6.
En déduire l'automate minimal $\mathcal{B}$ qui accepte le langage L.

Exercice 2 (8 points)

Un code linéaire est défini par la matrice génératrice :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(suite au verso)

1°) Quelles sont la dimension k et la longueur n du code ?

2°) Écrire la liste des mots de code, et en déduire la distance minimale d.
Combien d'erreurs ce code détecte-t-il de façon certaine ?
Ce code est-il parfait ? Est-ce un code de Hamming ?

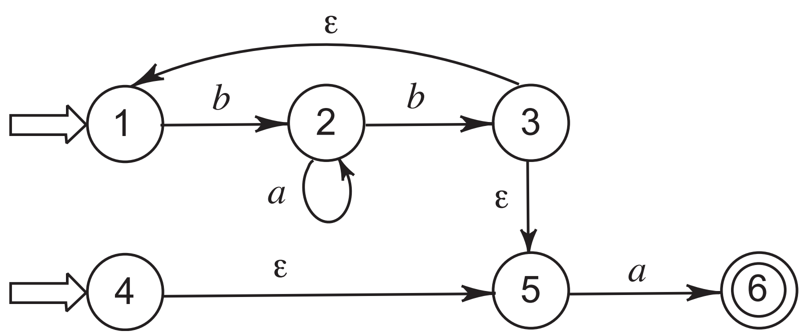
3°) On reçoit les messages suivants :
$m_1 = 1110110, m_2 = 1100101$ et $m_3 = 0101010$.
Donner, sous forme de table, les ensembles de vecteurs d'erreur $\Gamma(m_1)$, $\Gamma(m_2)$ et $\Gamma(m_3)$.

4°) En déduire les corrections possibles de chacun des messages reçus.

5°) Le canal binaire est supposé symétrique, sans mémoire, et on note p sa probabilité d'erreur. Quelle est la probabilité de se tromper en corrigeant le message m_1 ? Même question pour le message m_2 ?

Exercice 3 (8 points)

L'alphabet étant $\Sigma = \{a, b\}$, on note L le langage reconnu par l'automate non déterministe à transitions spontanées ($AFN - \varepsilon$) $\mathcal{A}$ défini par le diagramme :



1°) Donner la liste des mots de L de longueur inférieure ou égale à 4.

2°) Écrire la matrice des transitions de $\mathcal{A}$, et en déduire un automate déterministe $\mathcal{B}$ qui accepte le langage L.

3°) Écrire les équations du départ pour $\mathcal{A}$, et résoudre le système obtenu.
En déduire une expression régulière du langage L.

3°) Déterminiser l'automate $\mathcal{A}$: on obtient un automate déterministe (AFD) $\mathcal{B}$.

4°) En comparant les langages du départ de $\mathcal{B}$, déterminer l'automate minimal C qui accepte le langage L.

5°) Peut-on trouver un automate $\mathcal{D}$ plus simple que C et qui accepte aussi le langage L ?

☆☆☆☆☆☆