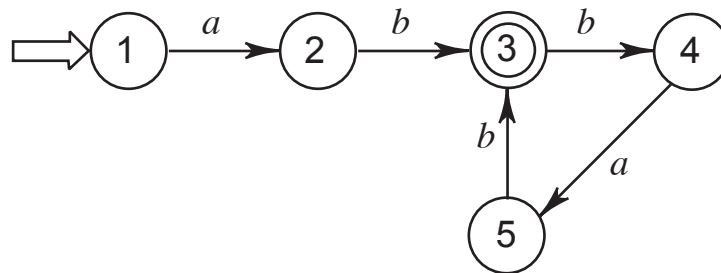


MVA003
Automates, codes, graphes et matrices
 Première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (8 points)

L'alphabet étant $\Sigma = \{a, b\}$, on note L le langage reconnu par l'automate non déterministe (AFN) \mathcal{A} défini par le diagramme :



- 1°) Quels sont les deux mots les plus courts du langage L ?
- 2°) Écrire les équations du départ pour \mathcal{A} , et résoudre le système obtenu.
En déduire une expression régulière du langage L .
- 3°) Déterminer l'automate \mathcal{A} : on obtient un automate déterministe (AFD) \mathcal{B} .
- 4°) En comparant les langages du départ de \mathcal{B} , déterminer l'automate minimal \mathcal{C} qui accepte le langage L .
- 5°) Écrire les équations du départ pour \mathcal{C} , et résoudre le système obtenu.
En déduire une autre expression régulière du langage L .

Exercice 2 (9 points)

On code des blocs de trois bits de la façon suivante :

Le bloc $b_1b_2b_3$ est codé $b_1b_2b_3a_1a_2a_3$, où les bits a_1 , a_2 et a_3 sont donnés par :

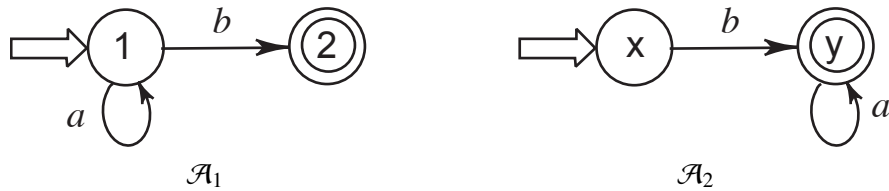
$$a_1 = b_1 \oplus b_2, \quad a_2 = b_1 \oplus b_3 \quad \text{et} \quad a_3 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3.$$

- 1°) Donner la dimension k et la longueur n de ce code.
- 2°) Montrer que ce code est linéaire. Écrire sa matrice génératrice G , ainsi que la matrice tH , transposée de la matrice de contrôle.
- 3°) Écrire la liste des mots de code. *(suite au verso)*

- 4°) Déterminer la distance minimale d .
Ce code est-il parfait ? Est-ce un code de Hamming ?
- 5°) Écrire la liste des syndromes.
- 6°) On reçoit les messages suivants :
 $m_1 = 110110, m_2 = 011001$ et $m_3 = 111111$.
Calculer leurs syndromes, et, le cas échéant, les corriger.
- 7°) Le canal binaire est supposé symétrique, sans mémoire, et on note p sa probabilité d'erreur. Quelle est la probabilité de se tromper en corrigeant m_2 ?

Exercice 3 (9 points)

L'alphabet étant $\Sigma = \{a, b\}$, on note L_1 et L_2 les langages reconnus par les automates \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 définis par les diagrammes :



- 1°) Déterminer les langages L_1 et L_2 .
- 2°) Dessiner le diagramme d'un automate \mathcal{A} qui accepte le langage $L = L_1 + L_2$ (réunion de L_1 et L_2).
- 3°) Déterminer \mathcal{A} , pour obtenir un AFD \mathcal{B} qui accepte le langage L .
- 4°) En comparant les langages du départ de \mathcal{B} , déterminer l'automate minimal C qui accepte le langage L .
- 5°) On note maintenant $L' = L_1 \cap L_2$ l'intersection de L_1 et L_2 , et on cherche à construire un automate reconnaissant L' . Pour cela :
 - a) Déterminer \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 , puis en déduire des automates \mathcal{B}'_1 et \mathcal{B}'_2 qui acceptent $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ (complémentaires de L_1 et L_2).
 - b) Dessiner le diagramme d'un automate \mathcal{B}' qui accepte le langage $\overline{L_1} + \overline{L_2}$ (réunion de $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$).
 - c) Déterminer \mathcal{B}' , et en déduire un automate \mathcal{A}' acceptant $L' = \overline{\overline{L_1} + \overline{L_2}}$.
- 6°) Vérifier la construction précédente en résolvant le système du départ pour \mathcal{A}' .

★ ★ ★ ★ ★ ★